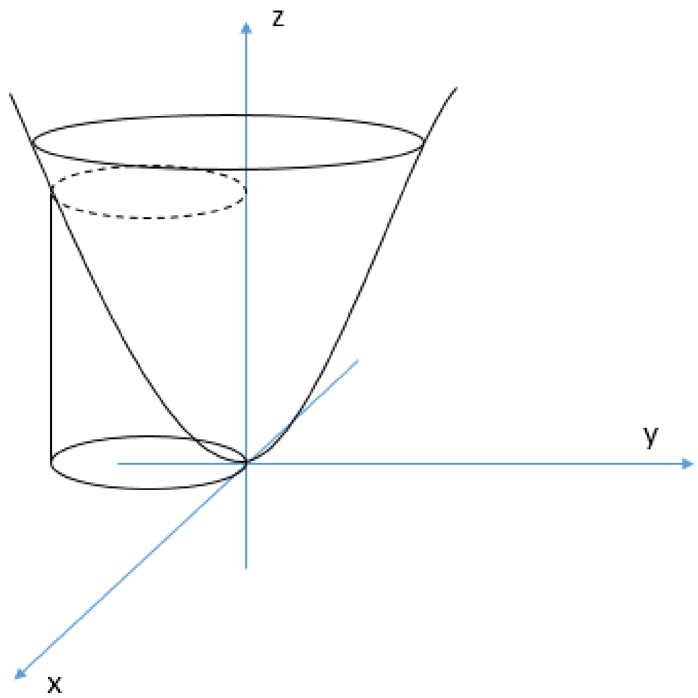
Matemáticas 5. Segundo Parcial 1-2 Miguel Guzman.

1.- Calcule $\iiint_T zdxdydz$, donde T es el sólido limitado superiormente por la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano $z = 0$ y esta contenida en el cilindro $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

Solución.

Graficamos las regiones, la primera es un paraboloide, la segunda un plano y la tercera un cilindro descentrado del origen y centrado en el punto $(0, -1)$ de radio 1. Note que el volumen es la región entre cilindro y la parte externa del paraboloide



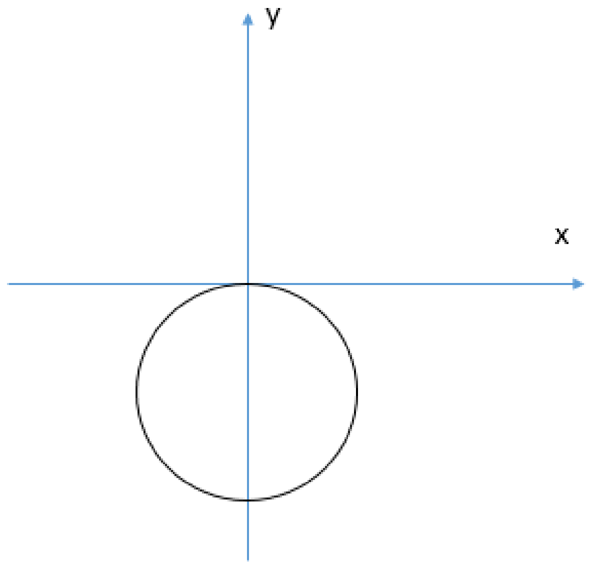
Para calcular la triple integral aplicamos coordenadas cilíndricas, por ello procedemos con la integral de la altura que en este caso corresponde a la variable "z".

$$I = \iint \int_0^{x^2+y^2} zdz\,dxdy \quad \Rightarrow I = \iint_A \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 dxdy$$

Donde A es la proyección del sólido.

Proyectamos el sólido sobre el plano XY, y tendremos la ecuación de un círculo definido por el cilindro. Entienda Ud. El por qué esta proyección.

Se tiene



La ecuación es $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

Aplicamos coordenadas polares.

$$T = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad : \quad jacobiano = r$$

Las variables tendrán los siguientes intervalos.

$$\theta \in (\pi, 2\pi) \qquad\qquad r \in (0, r_c)$$

Donde podemos determinar r_c en la ecuación de la circunferencia, ya que este valor corresponde a la periferia del círculo. Sustituimos el cambio polar en la ecuación de la circunferencia.

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) + 2\,r\sin(\theta) + 1 = 1$$

Aplicando algebra y un poco de trigonometría

$$r^2 + 2r\sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r + 2\sin(\theta)) = 0$$

Se tiene dos soluciones posibles

$$r_1 = 0 \quad r_2 = -2\sin(\theta)$$

Donde observamos que $\quad r_c = r_2 = -2\sin(\theta)$

Sustituimos el cambio polar en la integral

$$I = \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{-2\sin(\theta)} \frac{1}{2} r^4 r\, dr\, d\theta$$

Procedemos a integrar

$$I = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \left.\frac{r^6}{6}\right|_0^{-2\sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2^6}{6}\sin^6(\theta)\, d\theta = \frac{2^4}{3}\int_{\pi}^{2\pi} \sin^6(\theta)\, d\theta$$

Para resolver esa integral recordamos Mate2, para potencia pares, dejamos un cuadrado y elevamos a lo que resta de la división, a la potencia cuadrática, aplicamos la reducción de potencia del seno

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Se tiene

$$I = \frac{2^4}{3}\int_{\pi}^{2\pi} (\sin^2(\theta))^3\, d\theta = \frac{2^4}{3}\int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^3 d\theta = \frac{2}{3}\int_{\pi}^{2\pi} 1 - 3\cos(2\theta) + 3\cos^2(2\theta) - \cos^3(2\theta)\, d\theta$$

Para el coseno cuadrático se aplica la reducción de potencia del coseno

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Y para el coseno cubico, se separa una unidad, y del cuadrático restante se aplica la identidad pitagórica para trigonometría

$$I = \frac{2}{3}\left[\int_{\pi}^{2\pi} 1 d\theta - 3\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2\theta)\, d\theta + 3\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1+\cos(4\theta)}{2} d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(2\theta)\,(1-\sin^2(2\theta)) d\theta\right]$$

$$I = \frac{2}{3}\left[\pi - \frac{3}{2}\sin(2\theta)\ \Big|_{\pi}^{2\pi} + 3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(4\theta)}{8}\right)_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right)_{0}^{0}\right] \Rightarrow I = \frac{2}{3}\left[\pi + \frac{3}{2}\pi\right]$$

$$\boldsymbol{I = \frac{5}{3}\pi \quad RESP}$$

2.- Sabiendo que la curva parametrizada por

$$\boldsymbol{\sigma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \quad con\ t \in [0, 2\pi]}$$

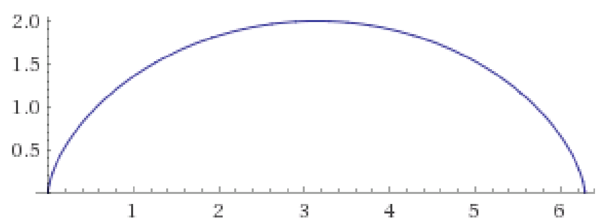
Es simple, calcule el área de la región encerrada por la curva y el eje de las x.

Solución.

Seleccionamos 4 valores de t, para obtener 4 puntos de la gráfica de sigma, tenemos

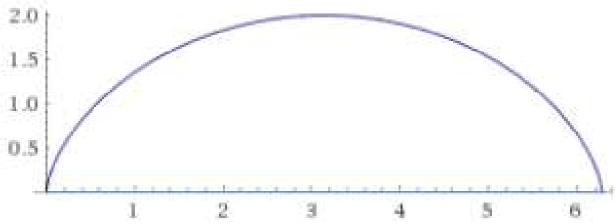
$$t = 0 \ \Rightarrow (0,0) \quad t = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - 1\,, 1\right) \quad t = \pi \ \Rightarrow (\pi, 2) \quad t = \frac{3}{2}\pi \ \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\pi + 1\,, 1\right) \quad t = 2\pi \ \Rightarrow (2\pi, 0)$$

Graficamos estos 4 puntos y obtenemos la siguiente grafica



Matemáticas 5. Segundo Parcial 1-2 Miguel Guzman.

Bien, el problema nos indica que el área encerrada corresponde a sigma más la recta y=0 (eje X)



Nos dan la frontera parametrizada, luego podemos aplicar integral de línea. Para calcular área sabemos que

$$\int_{Dgreen} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \iint_A dA$$

Luego debemos buscar quien es la trayectoria cerrada.

La trayectoria cerrada D será $D = \sigma \cup l$ donde "l" corresponde a la recta y=0. Ya que la trayectoria cerrada es la unión de dos trayectorias se sabe.

$$\int_{Dgreen} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \int_{\sigma green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy + \int_{l\ green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy$$

Procedemos a aplicar integral de línea.

Ya sigma esta parametrizada

$$\int_{\sigma green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-\cos(t)) \\ \frac{1}{2}(t-\sin(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} > dt$$

$$\int_{\sigma green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(1-\cos(t))^2 + \frac{1}{2}(t-\sin(t))\sin(t)\,dt$$

Nos queda

$$\int_{\sigma green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -1 + 2\cos(t) - \cos^2(t) + t\sin(t) - \sin^2(t)\,dt$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} -1dt + 2\int_0^{2\pi}\cos(t)\,dt - \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt + \int_0^{2\pi} t\sin(t)\,dt - \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[2\pi - 2\sin(t)_0^{2\pi} + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)_0^{2\pi} + (\sin(t) - t\cos(t))_0^{2\pi} - \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)_0^{2\pi}\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{2}[-2\pi - \pi - 2\pi - \pi] \quad \Rightarrow \quad I_1 = -3\pi$$

Se concluye para la primera integral

$$\int_{\sigma green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = -3\pi$$

Calculamos ahora la recta "l"

$$\int_{l\ green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy$$

Donde la parametrizacion corresponde

$$l(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \in (0, 2\pi)$$

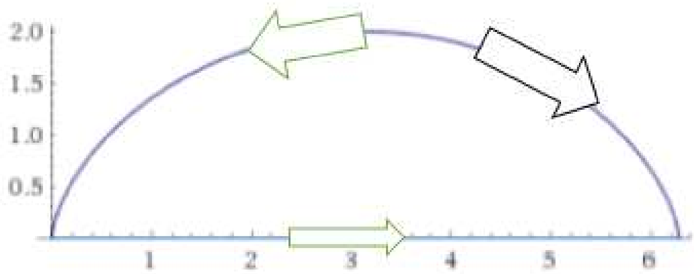
Aplicamos la definición de integral de línea para esta parametrizacion

$$\int_{l\ green} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > dt = 0$$

Resumimos

$$\int_{Dgreen} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = -3\pi + 0$$

El sentido Green es antihorario para este problema



Y se observa que el sentido dado por la parametrizacion de sigma es opuesto, luego se deduce

$$\int_{Dgreen} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = -\int_D -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = 3\pi$$

Por otro lado

$$\int_D -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \iint_A dA = A \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A = 3\pi \quad RESP}$$

3.- Sea

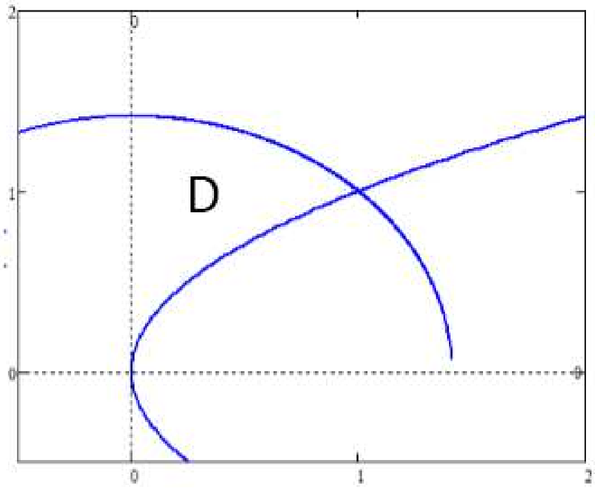
$$\boldsymbol{D = \{(x, y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\,, \qquad 0 \leq x \leq y^2 \quad y \geq 0\}}$$

Y sean $u = x^2 + y^2$, $v = x$. Considere el cambio de variable $T(u, v) = (x, y)$ y sea $D^* \subset R^2$ una región que cumple $T(D^*) = D$. Calcule el área de D^*

Solución.

Matemáticas 5. Segundo Parcial 1-2 Miguel Guzman.

Graficamos la región D



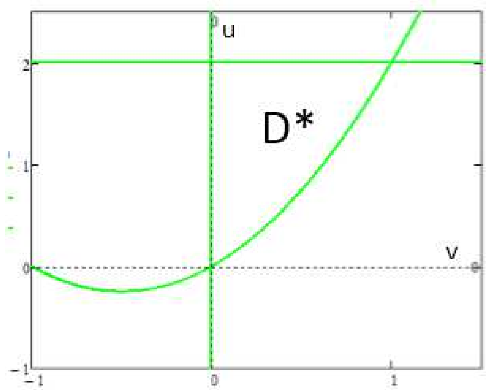
Cambiamos la región D a D^*. Para ello parametrizamos cada una de las fronteras.

$$C_1 : \ \sigma_1(y) = \left| \begin{matrix} x = 0 \\ 0 \le y \le \sqrt{2} \end{matrix} \right. \qquad C_2 : \ \sigma_2(x) = \left| \begin{matrix} x^2 + y^2 = 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix} \right. \qquad C_3 : \ \sigma_3(x) = \left| \begin{matrix} x = y^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix} \right.$$

Una vez parametrizado aplicamos el cambio de variable.

$$C_1^* \ : \ \sigma_1^* = \left| \begin{matrix} v = 0 \\ 0 \le u \le 2 \end{matrix} \right. \qquad C_2^* : \ \sigma_2^* = \left| \begin{matrix} u = 2 \\ 0 \le v \le 1 \end{matrix} \right. \qquad C_3^* \ : \ \sigma_3^* = \left| \begin{matrix} u = v + v^2 \\ 0 \le v \le 1 \end{matrix} \right.$$

Graficamos estas fronteras



El ejercicio nos pide calcular el área de esta región. Tenemos

$$\iint_{D^*} 1 \, dudv$$

Realizamos entonces los límites

$$A = \int_0^1 \int_{v+v^2}^2 1 \, dudv \ \Rightarrow \ A = \int_0^1 2 - v - v^2 dv = \left(2v - \frac{1}{2}v - \frac{1}{3}v^3\right)_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{7}{6} \ \ UnidadDeVolumen \quad RESP}$$

NOTA: Por qué no utilice el jacobiano? Veamos el teorema

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(u,v) jacobiano\ dudv$$

OJO, las dos regiones son distintas. El jacobiano solo se emplea cuando hago un cambio de variable a la función sobre la región D. **En el problema nos pide el área de D*, no el área de D por lo que no estamos cambiando variable.**

Se presta a confusión el ejercicio porque nos dan un cambio. Simplemente es para cambiar la región. No la función.

A modo ilustrativo, calculare el área de D utilizando el cambio de variable

$$\iint_D 1\ dxdy = \int_0^1 \int_{v+v^2}^2 \underbrace{\left|\frac{1}{2\sqrt{u-v^2}}\right|}_{Jacobiano} dudv = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$$

De igual forma resolvemos la integral sin realizar cambio de variable.

$$A = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} dydx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$$

Hecho en Mathcad